



## 方程（组）与不等式（组）的复习

例 1 【人教版七上第 97 页例 3（2）】解方程：

$$3x + \frac{x-1}{2} = 3 - \frac{2x-1}{3}.$$

例 2 【2023 常德中考】解方程：
$$\begin{cases} x - 2y = 1, \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 23. \textcircled{2} \end{cases}$$

例 3 【人教版九上第 14 页例 3（1）】解方程： $x(x-2) + x - 2 = 0.$

例 4 【人教版八上第 151 页】解方程：

$$(1) \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$$

$$(2) \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$



例 5 【人教版七上第 97 页例 3 (2) 变式】解不等式:

$$3x + \frac{x-1}{2} > 3 - \frac{2x-1}{3}$$

例 6 【人教版七下第 122 页例 1 (2)】解不等式, 并在数轴上表示解集

$$\frac{2+x}{2} \geq \frac{2x-1}{3}$$

例 7 【2022 长沙中考】解不等式组 
$$\begin{cases} 3x > -8 - x, \textcircled{1} \\ 2(x-2) \leq 6. \textcircled{2} \end{cases}$$

综合应用 已知关于  $x$  的方程  $2x - 4 = m - x$  的解为非负数, 求  $m$  的取值范围.

变式 已知关于  $x$  的方程  $\frac{4x-6}{x-2} + \frac{m}{2-x} = 1$  的解为非负数, 求  $m$  的取值范围.



例 8【2023 长沙】为提升学生身体素质,落实教育部门“在校学生每天锻炼时间不少于 1 小时”的文件精神,某校利用课后服务时间,在八年级开展“体育赋能,助力成长”班级篮球赛,共 16 个班级参加.

(1) 比赛积分规定:每场比赛都要分出胜负,胜一场积 3 分,负一场积 1 分.某班级在 15 场比赛中获得总积分为 41 分,问该班级胜负场数分别是多少?

(2) 投篮得分规则:在 3 分线外投篮,投中一球可得 3 分,在 3 分线内(含 3 分线)投篮,投中一球可得 2 分,某班级在其中一场比赛中,共投中 26 个球(只有 2 分球和 3 分球),所得总分不少于 56 分,问该班级在这场比赛中至少投中了多少个 3 分球?

### 核心素养拓展

阅读下列材料,解决问题

《张丘建算经》是一部数学问题集,其内容、范围与《九章算术》相仿.其中提出并解决了一个在数学史上非常著名的不定方程问题,通常称为“百鸡问题”：“今有鸡母一值钱三,鸡翁一值钱五,鸡雏三值钱一.凡百钱买鸡百只,问鸡翁、母、各几何。”

译文:每一只母鸡值三文钱,每一只公鸡值五文钱,每三只小鸡值一文钱.现在用一百文钱买一百只鸡,问这一百只鸡中,公鸡、母鸡、小鸡各有多少只?

(1) [尝试]若设母鸡有 $x$ 只,公鸡有 $y$ 只;

①小鸡有\_\_\_\_\_只,买小鸡一共花费\_\_\_\_\_文钱;

②根据题意,列出一个含有 $x$ ,  $y$ 的方程:\_\_\_\_\_;

(2) [探索]小军对“百鸡问题”增加一个条件:“母鸡数量是公鸡数量的 4 倍多 2 只,”求此时公鸡、母鸡、小鸡的只数;

(3) [拓展]小明对“百鸡问题”增加两个条件:“若买得公鸡和母鸡之和不超过 20 只,且买得公鸡数不低于母鸡数,”求此时公鸡、母鸡的只数.

课后作业:

生活中有很多方程与不等式问题,请同学们用数学的眼光去发现生活中的方程、不等式问题,并解决问题.



## 方程（组）与不等式（组）的复习答案

例 1 【人教版七上第 97 页例 3（2）】解方程：

$$3x + \frac{x-1}{2} = 3 - \frac{2x-1}{3}$$

解：去分母，得  $18x + 3(x-1) = 18 - 2(2x-1)$

去括号，得  $18x + 3x - 3 = 18 - 4x + 2$

移项，得  $18x + 3x + 4x = 18 + 2 + 3$

合并同类项，得  $25x = 23$

系数化为 1，得  $x = \frac{23}{25}$

例 2 【2023 常德中考】解方程：
$$\begin{cases} x - 2y = 1, & \text{①} \\ 3x + 4y = 23. & \text{②} \end{cases}$$

方法 1：代入消元法

方法 2：加减消元法

解：由①，得  $x = 2y + 1$ . ③

解：①×2，得  $2x - 4y = 2$ . ③

将③代入②，得  $3(2y + 1) + 4y = 23$ .

②+③，得  $5x = 25$

解这个方程，得  $y = 2$ .

解这个方程，得  $x = 5$ .

将  $y = 2$  代入③中，得  $x = 5$ .

将  $x = 5$  代入①中，得  $y = 2$ .

所以这个方程组得解是  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

所以这个方程组得解是  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

例 3 【人教版九上第 14 页例 3（1）】解方程： $x(x-2) + x - 2 = 0$ .

方法 1：因式分解法

解：因式分解，得  $(x-2)(x+1) = 0$

于是，得  $x-2 = 0$ , 或  $x+1 = 0$  解得  $x_1 = 2, x_2 = -1$

方法 2：配方法

解：整理，得  $x^2 - x = 2$

配方，得  $x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 = 2 + (\frac{1}{2})^2$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

由此可得  $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$  解得  $x_1 = 2, x_2 = -1$

方法 3：公式法

解：整理，得  $x^2 - x - 2 = 0$

$a = 1, b = -1, c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

方程有两个不相等的实数根

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$  即  $x_1 = 2, x_2 = -1$



例 4 【人教版八上第 151 页】解方程：

$$(1) \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$$

解：方程两边乘 $x(x-3)$ ,得

$$2x = 3x - 9$$

解得： $x = 9$

检验：当 $x = 9$ 时, $x(x-3) \neq 0$

所以，原分式方程的解为 $x = 9$

$$(2) \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

解：方程两边乘 $(x-1)(x+2)$ ,得

$$x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3$$

解得： $x = 1$

检验：当 $x = 1$ 时, $(x-1)(x+2) = 0$

因此 $x = 1$ 不是原分式方程的解

所以，原分式方程无解

例 5 【人教版七上第 97 页例 3 (2) 变式】解不等式：

$$3x + \frac{x-1}{2} > 3 - \frac{2x-1}{3}$$

解：去分母，得  $18x + 3(x-1) > 18 - 2(2x-1)$

去括号，得  $18x + 3x - 3 > 18 - 4x + 2$

移项，得  $18x + 3x + 4x > 18 + 2 + 3$

合并同类项，得  $25x > 23$

系数化为 1，得  $x > \frac{23}{25}$

例 6 【人教版七下第 122 页例 1 (2)】解不等式，并在数轴上表示解集

$$\frac{2+x}{2} \geq \frac{2x-1}{3}$$

解：去分母，得  $3(2+x) > 2(2x-1)$

去括号，得  $6+3x > 4x-2$

移项，得  $3x-4x > -2-6$

合并同类项，得  $-x > -8$

系数化为 1，得  $x < 8$

例 7 【2022 长沙中考】解不等式组 
$$\begin{cases} 3x > -8 - x, \textcircled{1} \\ 2(x-2) \leq 6. \textcircled{2} \end{cases}$$

解：解不等式①，得 $x > -2$ .

解不等式②，得 $x \leq 5$

则不等式组的解集为  $-2 < x \leq 5$



综合应用 已知关于 $x$ 的方程  $2x - 4 = m - x$  的解为非负数, 求 $m$ 的取值范围.

解:  $2x + x = m + 4$

$$3x = m + 4$$

$$x = \frac{m + 4}{3}$$

因为  $x \geq 0$

$$\text{所以 } \frac{m+4}{3} \geq 0$$

$$\text{解得 } m \geq -4$$

变式 已知关于 $x$ 的方程  $\frac{4x-6}{x-2} + \frac{m}{2-x} = 1$  的解为非负数, 求 $m$ 的取值范围.

解: 由题意, 得  $3x = m + 4$

$$\text{解得 } x = \frac{m+4}{3}$$

因为  $x \geq 0$  且  $x \neq 2$

$$\text{所以 } \frac{m+4}{3} \geq 0 \text{ 且 } \frac{m+4}{3} \neq 2$$

$$\text{解得 } m \geq -4 \text{ 且 } m \neq 2$$

例 8 【2023 长沙】为提升学生身体素质, 落实教育部门“在校学生每天锻炼时间不少于 1 小时”的文件精神, 某校利用课后服务时间, 在八年级开展“体育赋能, 助力成长”班级篮球赛, 共 16 个班级参加.

(3) 比赛积分规定: 每场比赛都要分出胜负, 胜一场积 3 分, 负一场积 1 分. 某班级在 15 场比赛中, 获得总积分为 41 分, 问该班级胜负场数分别是多少?

(4) 投篮得分规则: 在 3 分线外投篮, 投中一球可得 3 分, 在 3 分线内(含 3 分线)投篮, 投中一球可得 2 分, 某班级在其中一场比赛中, 共投中 26 个球(只有 2 分球和 3 分球), 所得总分不少于 56 分, 问该班级在这场比赛中至少投中了多少个 3 分球?

解: (1) 设该班级胜了 $x$ 场, 负了 $y$ 场.

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} x + y = 15, \\ 3x + y = 41. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 13, \\ y = 2. \end{cases}$$

答: 该班级胜了 13 场, 负了 2 场.

(2) 设班级在这场比赛中投中了 $m$ 个 3 分球, 则投中了 $(26 - m)$ 个 2 分球.

$$\text{由题意, 得 } 3m + 2(26 - m) \geq 56$$

$$\text{解得 } m \geq 4$$

答: 该班级中至少投中了 4 个 3 分球.



## 核心素养拓展

阅读下列材料，解决问题

《张丘建算经》是一部数学问题集，其内容、范围与《九章算术》相仿。其中提出并解决了一个在数学史上非常著名的不定方程问题，通常称为“百鸡问题”：“今有鸡母一值钱三，鸡翁一值钱五，鸡雏三值钱一。凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、各几何。”

译文：每一只母鸡值三文钱，每一只公鸡值五文钱，每三只小鸡值一文钱。现在用一百文钱买一百只鸡，问这一百只鸡中，公鸡、母鸡、小鸡各有多少只？

(1) [尝试]若设母鸡有 $x$ 只，公鸡有 $y$ 只；

①小鸡有 $(100 - x - y)$ 只，买小鸡一共花费 $\frac{100-x-y}{3}$ 文钱；

②根据题意，列出一个含有 $x, y$ 的方程： $3x + 5y + \frac{100-x-y}{3} = 100$ .

(2) [探索]小军对“百鸡问题”增加一个条件：“母鸡数量是公鸡数量的4倍多2只，”求此时公鸡、母鸡、小鸡的只数；

(3) [拓展]小明对“百鸡问题”增加两个条件：“若买得公鸡和母鸡之和不超过20只，且买得公鸡数不低于母鸡数，”求此时公鸡、母鸡的只数。

(2) 由题意，得
$$\begin{cases} 3x + 5y + \frac{100-x-y}{3} = 100, \\ x = 4y + 2. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 18, \\ y = 4. \end{cases}$$

所以 $100 - x - y = 78$ .

答：母鸡有18只，公鸡有4只，小鸡有78只。

(3) 本道题转化为数学问题为：

已知 $3x + 5y + \frac{100-x-y}{3} = 100$ ， $x + y \leq 20$ ， $x \leq y$ ，

求非负整数 $x, y$ 的值

解：方程 $3x + 5y + \frac{100-x-y}{3} = 100$ ，化简得：

$$4x + 7y = 100, \text{ 即 } x = 25 - \frac{7y}{4};$$

当 $y = 0$ 时， $x = 25$ ；当 $y = 4$ 时， $x = 18$ ；

当 $y = 8$ 时， $x = 11$ ；当 $y = 12$ 时， $x = 4$ ；

当 $y = 16$ 时， $x = -3$ ；(舍)

因为 $x + y \leq 20$ ， $x \leq y$ ，所以仅有 $x = 4$ ， $y = 12$ 符合题意，

答：公鸡有12只，母鸡有4只。

课后作业：

生活中有很多方程与不等式问题，请同学们用数学的眼光去发现生活中的方程、不等式问题，并解决问题。