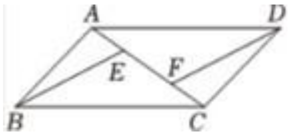
与四边形有关的证明与计算-导学案（答案）

类型一：平行四边形性质和判定的应用

例 1 如图,已知在四边形$ABCD$中,$AB//CD,E$、F为对角线AC上的两点,且$AE=CF,DF//BE$.求证四边形$ABCD$是平行四边形

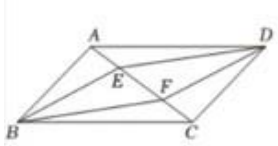


解:$\because AB//CD$
$\therefore \angle BAE=\angle DCF$
$\because BE//DF$
$\therefore \angle BEF=\angle DFE$
$\therefore \angle AEB=\angle CFD$
在 ΔAEB和 ΔCFD中

$$\begin{cases}\angle AEB=\angle CFD\\ AE=CF\\ \angle EAB=\angle FCD\end{cases}$$

$\therefore \Delta AEB\cong\Delta CFD(ASA)$
$\therefore AB=CD$
$\because AB//CD,AB=CD$
$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形

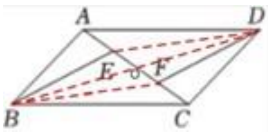
变式 如图,已知在平行四边形$ABCD$中,E、F是对角线AC上的两点, 并且$AE=CF$.求证$BE=DF$



方法一：

解:$\because$ ▱$ABCD$
$\therefore AB\underset{=}{\parallel}CD$
$\because AB//CD$
$\therefore \angle BAE=\angle DCF$
在 ΔABE和 ΔCDF中
$AB=CD,\angle BAE=\angle DCF,AE=CF$
$\therefore \Delta ABE\cong\Delta CDF(SAS)$
$\therefore BE=DF$

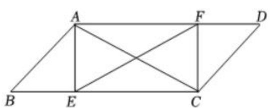
方法二：



解: 连接BD交AC于点O,连接DE、BF
$\because$ ▱$ABCD$
$\therefore AO=CO,BO=DO$
$\because AO=CO,AE=CF$
$\therefore EO=FO$
$\because EO=FO,BO=DO$
$\therefore$ 四边形$BEDF$为平行四边形
$\therefore BE=DF$

类型二：特殊平行四边形性质和判定的应用

例 2 如图,在▱$ABCD$中,点E、F分别在BC,AD上,$BE=DF,AC=EF$



(1)求证:四边形$AECF$是矩形

(2)若$AE=BE,AB=2,tan\angle ACB=\frac{1}{2}$,求$BC$的长

解：

(1) $\because$ ▱$ABCD$

$\therefore AD=BC, AD//BC$

$\because BE=DF$

$\therefore AD-DF=BC-BE$

即$AF=EC$

$\because AF=EC, AF//EC$

$\therefore$ 四边形$AECF$是平行四边形

又 $\because AC=EF$

$\therefore$ ▱$AECF$是矩形

(2) $\because$ 四边形$AECF$是矩形

$\therefore \angle AEC=\angle AEB=90°$

$\because \angle AEB=90°, AE=BE, AB=2$

$\therefore AE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$

在$Rt\Delta AEC$中

$tan\angle ACE=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$

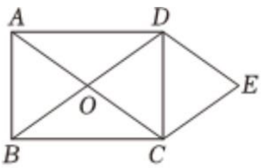
$\therefore EC=2AE=2\sqrt{2}$

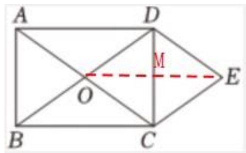
$\therefore BC=BE+EC=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

例 3 如图,矩形$ABCD$的对角线AC、BD相交于点O, $DE//AC$, $CE//BD$

(1)求证:四边形$OCED$是菱形

(2)若$BC=3$, $DC=2$,求四边形$OCED$的面积





解：

(1)连OE交CD于点M

$\because DE//AC, CE//BD$

$\therefore$ 四边形$OCED$是平行四边形

$\therefore M$为DC的中点

$\because$ 矩形$ABCD$

$\therefore O$为DB的中点, $\angle BCD=90°$

$\because O$为DB的中点, M为DC的中点

$\therefore OM$为 ΔDBC中位线

$\therefore OM//BC$

$\therefore \angle OMD=\angle BCD=90°$

$\therefore DC\perp OE$

$\because$ ▱$OCED$, $DC\perp OE$

$\therefore$ ▱$OCED$是菱形

(2)方法一： $\because OM$为 ΔDBC的中位线, $BC=3$

$\therefore OM=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$

$\because$ 菱形$OCED$

$\therefore OE=2OM=3$

$\therefore S=\frac{1}{2}DC\cdot OE$

$\because DC=2, OE=3$

$\therefore S=3$

方法二：$S_{\Delta OBC}=S_{\Delta OCD}=S_{\Delta ECD}$

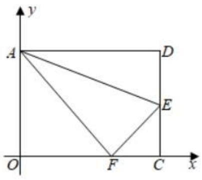
$S_{菱形}=S_{Rt\Delta DBC}=\frac{1}{2}BC\cdot DC=3$

类型三：图形几何变换—折叠与旋转

例4 如图,在平面直角坐标系中,将矩形$ADCO$沿直线AE折叠(点E在DC边上),折叠后顶点恰好落在OC边上的点F处,若点D的坐标为$(10,8)$

(1)求CF的长

(2)求点E的坐标



解：

(1) $\because$ 点D的坐标为$(10,8)$

$\therefore OA=8, AD=OC=10$

根据折叠的性质知

$AF=AD=10$

在$Rt\Delta AOF$中,$OF=\sqrt{AF^2-OA^2}=6$

$\therefore CF=OC-OF=4$

(2)方法一：根据折叠的性质可知$FE=DE$

设$CE=x$,则$FE=8-x$

在$Rt\Delta CEF$中

$FC^2+CE^2=FE^2$

即$4^2+x^2=(8-x)^2$

解得$x=3$

$\therefore$ 点E的坐标为$(10,3)$

方法二：根据折叠的性质可知$\angle AFE=\angle D=90°$

$\therefore \angle AFO+\angle EFC=90°$

$\because \angle O=90°$

$\therefore \angle AFO+\angle FAO=90°$

$\therefore \angle FAO=\angle EFC$

在 ΔAOF和 ΔFCE中

$\angle FAO=\angle EFC, \angle O=\angle C$

$\therefore \Delta AOF \backsim \Delta FCE$

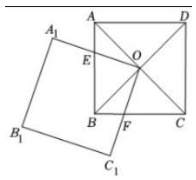
$\therefore \frac{AO}{FC}=\frac{OF}{CE}$

$\because AO=8, OF=6, FC=4$

$\therefore CE=3$

$\therefore$ 点E的坐标为$(10,3)$

例 5 如图,正方形$ABCD$的对角线相交于O,点O又是正方形$A_1B_1C_1O$的一个顶点,而且这两个正方形的边长相等,求证无论正方$A_1B_1C_1O$绕O点怎样转动,两个正方形重叠部分的面积,总等于一个正方形面积的$\frac{1}{4}$



解:$\because$ 四边形$ABCD$是正方形

$\therefore AO=BO, \angle AOB=90°$

$\angle BAO=\angle CBO=45^{\circ}$

$\because$ 四边形$A_1B_1C_1O$是正方形

$\therefore \angle A_1OC_1=90^{\circ}$

$\because \angle AOB=90^{\circ}, \angle A_1OC_1=90^{\circ}, \angle EOB=\angle EOB$

$\therefore \angle AOE=\angle BOF$

在 ΔOAE和 ΔOBF中

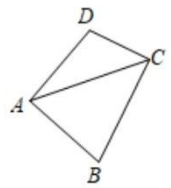
$\angle EAO=\angle FBO, OA=OB, \angle AOE=\angle BOF$

$\therefore \Delta OAE \cong \Delta OBF(ASA)$

$\therefore S_{\Delta OAE}=S_{\Delta OBF}$

$\therefore S_{重叠}=S_{\Delta OEB}+S_{\Delta OBF}=S_{\Delta OEB}+S_{\Delta OAE}=S_{\Delta AOB}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$

变式 如图,在四边形 ABCD 中,AB=AD,∠BAD=∠BCD=90°,连接 AC,若 AC=6,求四边形 ABCD 的面积



解:将 ΔABC绕点A逆时针旋转 90°,得到 ΔADE

$\because \angle B+\angle D=180°$

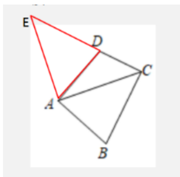
$\therefore C$、D、E三点共线

由旋转的性质可得

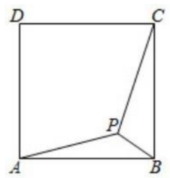
$AC=AE, \angle EAC=90^{\circ}$

$\because AC=6$

$S_{四边形ABCD}=S_{Rt\Delta EAC}=\frac{1}{2}AC^2=\frac{36}{2}$



变式 如图,点P是正方形$ABCD$内一点,且点P到点A、B、C的距离为 $2\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$、4,求正方形$ABCD$的面积



解:如图,将 ΔABP绕点B顺时针旋转 90°,得到 ΔCBM,

连接PM,过点B作$BH \perp PM$于H

$\because BP=BM=\sqrt{2}, \angle PBM=90^{\circ}$

$\therefore PM=\sqrt{2}PB=2$

$\because PC=4, PA=CM=2\sqrt{3}$

$\therefore PC^2=CM^2+PM^2$

$\therefore \angle PMC=90°$

$\because \angle BPM=\angle BMP=45^{\circ}$

$\therefore \angle CMB=\angle APB=135°$

$\therefore \angle APB+\angle BPM=180°$

$\therefore A$、P、M共线

$\because BH \perp PM$

$\therefore PH=HM$

$\therefore BH=PH=HM=1$

$\therefore AH=2\sqrt{3}+1$

$\therefore AB^2=AH^2+BH^2=\left(2\sqrt{3}+1\right)^2+1^2=14+4\sqrt{3}$

$\therefore$ 正方形$ABCD$的面积为 $14+4\sqrt{3}$