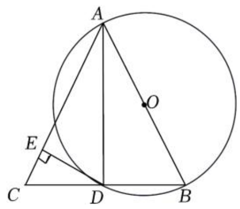
与圆有关的证明与计算导学案（答案版）

类型一 证明圆的切线

例 1 已知:AB 是⊙ O的直径，BD 是⊙ O的弦，延长 BD 到点 C，使 AB=AC，连结 AC，过点 D 作$DE\perp AC$，垂足为 E.

求证:DE 为⊙ O的切线.



法 1：

证: 连接 OD

$\because AB=AC$

$\therefore \angle C=\angle ABC$

$\because OD=OB$

$\therefore \angle ODB=\angle ABC$

$\therefore \angle C=\angle ODB$

$\therefore AC//OD$

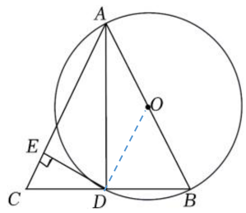
$\therefore \angle ODE=\angle CED$

$\because DE\perp AC$

$\therefore \angle CDE=90°$

$\therefore \angle ODE=90°$

$\therefore$ DE 为 ⊙ O 的切线



法 2：

证: 连接 OD

$\because$ AB 是直径

$\therefore AD\perp BC$

$\because AB=AC$

$\therefore$ AD 为等腰 △ ABC 中线

$\therefore$ D 为 BC 中点

$\because$ O 为 AB 中点

$\therefore$ 0D 为 △ ABC 中位线

$\therefore AC//OD$

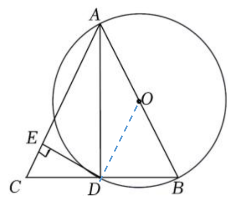
$\therefore \angle ODE=\angle CED$

$\because DE\perp AC$

$\therefore \angle CDE=90°$

$\therefore \angle ODE=90°$

$\therefore$ DE 为⊙O 的切线



例 2 如图，C 是⊙ O上一点，点 P 在直径 AB 的延长线上，⊙ O的半径为 6，PB=4，PC=8.

求证:PC 是⊙ O的切线

证: 连接 OC

$\because$⊙ O 的半径为 $6, PB=4, PC=8$

$\therefore OC=OB=6$

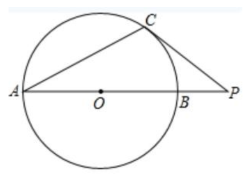
$OP=OB+BP=6+4=10$

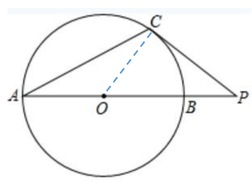
$\because OC^2+PC^2=6^2+8^2=100$

$OP^2=10^2=100$

$\therefore OC^2+PC^2=OP^2$

$\therefore$△ OCP 是直角三角形



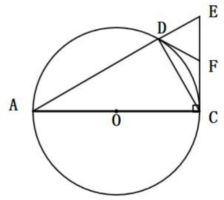


$\therefore OC \perp PC$

$\therefore$ PC 是 $\odot$ O 的切线

例 3 如图，AC 是$\odot$ O的直径，过点 C 作 AC 的垂线交 AD 的延长线于点 E，点 F 是 EC 的中点，连接 DC, DF.

求证:DF 是$\odot$ O的切线



法 1：

证:连接 OD,OF

$\because$ AC 是$\odot$O 的直径

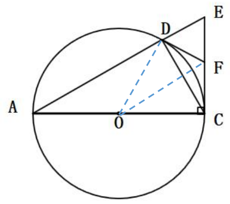
$\therefore \angle ADC = \angle CDE = 90°$

$\therefore \triangle CDE$ 是直角三角形

$\because$ F 是 EC 中点

$\therefore DF = CF$

$\because$在 $\triangle ODC$ 和 $\triangle OCF$ 中



$$\begin{cases} DF = CF \\ OF = OF \\ OD = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ODC \cong \triangle OCF(SSS)$

$\therefore \angle ODC = \angle OCF$

$\therefore AC \perp EC$

$\therefore \angle OCF = 90°$

$\therefore \angle ODF = 90°$

$\therefore$ DF 是 $\odot$ O 的切线

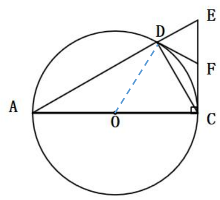
法 2：

证:连接 OD

$\because$ AC 是 $\odot$ O 的直径

$\therefore \angle ADC = \angle CDE = 90°$

$\therefore \triangle CDE$ 是直角三角形



$\because$ F 是 EC 中点

$\therefore DF = CF$

$\therefore \angle FDC = \angle FCD$

$\because OD = OC$

$\therefore \angle ODC = \angle OCD$

$\therefore \angle FDC + \angle ODC = \angle FCD + \angle OCD$

$\therefore \angle ODC = \angle OCF$

$\because AC \perp EC$

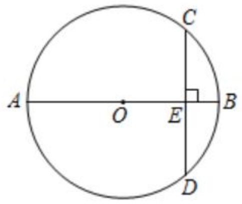
$\therefore \angle OCF = 90°$

$\therefore \angle ODF = 90°$

$\therefore$ DF 是 $\odot$ O 的切线

类型二 计算与圆有关的线段长，三角函数值，线段积

例 1 如图，AB 为⊙ O的直径，弦 CD⊥AB 于点 E，已知 CD=6，EB=1，求⊙ O的半径.



解: 连接 OC

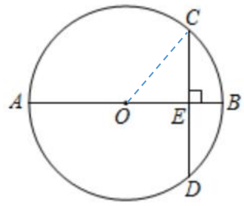
设 OC=r

$OE = r - 1$

$\because$ AB 为直径

$AB \perp CD$ 于点 E

$\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 3$



$\therefore$ 在 $Rt\triangle OCE$ 中

$OE^2 + CE^2 = OC^2$

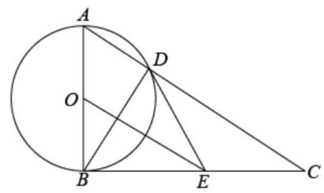
$(r-1)^2 + 3^2 = r^2$

解得 $r = 5$

$\therefore$⊙ O 的半径为 5

例 2 **如图，以 AB 为直径的⊙ O与△ABC 的边 BC 相切于点 B，与 DE 相切于点 E,且与 AC 边交于点 D,点 E 为 BC 中点，连接 DE、BD.**

若 DE=5，cos∠ABD=$\frac{4}{5}$，求 OE 的长.



解$\because$ BE 是 ⊙ O 的切线

DE 是 ⊙ O 的切线

$\therefore BE = DE = 5$

又$\because$OB=OD

$\therefore$ OE 是 BD 的垂直平分线

$\therefore \angle OFB = 90°$

$\therefore \angle ABD + \angle BOF = 90°$

$\because \angle OEB + \angle BOF = 90°$

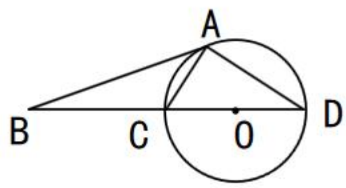
$\therefore \angle OEB = \angle ABD$

在 $Rt\triangle OBE$ 中

$$OE = \frac{BE}{COS\angle OEB} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{4}$$

例 3 如图 CD 是⊙ O直径，A 是⊙ O上异于 C，D 的一点，点 B 是延长线上一点，连接 AB、AC、AD，且∠BAC=∠ADB.

若 BC=2OC,求 tan∠ADB 的值.



解: 设 $OC = x$, 则 $BC = 2x$

$\because \angle BAC = \angle ADB$

又 $\because \angle ABC = \angle DBA$

$\therefore \triangle BAC \backsim \triangle BDA$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD}$

$\therefore AB^2 = BD \times BC = 4x \cdot 2x = 8x^2$

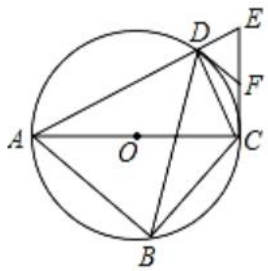
$\therefore AB=2\sqrt{2}x$

$\therefore \tan\angle ADB=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

例 4 如图，四边形 ABCD 内接于⊙ O，对角线 AC 为⊙ O的直径，过点 C 作 AC 的垂线交 AD 的延长线于点 E，点 F 为 CE 的中点，连接 DB，DC，DF.

若 AC=$2\sqrt{5}$DE，求 tan∠ABD 的值.

解: 设 $DE=x, AC=2\sqrt{5}x$



$\because AC$ 为直径

$\therefore \angle ADC=90°$

$\because CE\perp AC$

$\therefore \angle ACE=90°$

$\therefore \angle ADC=\angle ACE$

又 $\because \angle DAC=\angle CAE$

$\therefore\triangle ADC\backsim\triangle ACE$

$\therefore \frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AC}$

$\therefore AC^2=AD\times AE$

$\therefore (2\sqrt{5}x)^2=AD\times(AD+x)$

$\therefore AD^2+ADx-20x^2=0$

$\therefore (AD+5x)(AD-4x)=0$

$\therefore AD=-5x(舍)AD=4x$

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=2x$

$\because \widehat{AD}=\widehat{AD}$

$\therefore \angle ABD=\angle ACD$

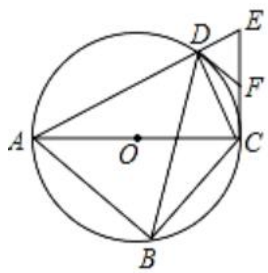
$\therefore \tan\angle ABD=\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=2$

变式 1 如图，四边形 ABCD 内接于⊙ O，对角线 AC 为⊙ O的直径，过点 C 作 AC 的垂线交 AD 的延长线于点 E，点 F 为 CE 的中点，连接 DB，DC，DF.AC=$2\sqrt{5}$DE，tan∠ACD=2

若 BD 是∠ADC 的平分线，AC=$2\sqrt{5}$

求 DG・DB

解： $\because \tan\angle ACD=\frac{AD}{AC}=2$



$AD^2+DC^2=AC^2$

$\therefore AD=4, DC=2$

$\because BD$ 平分$\angle ADC$

$\therefore \angle ADG=\angle BDC$

$\because \widehat{CD}=\widehat{CD}$

$\therefore \angle DAG=\angle DBC$

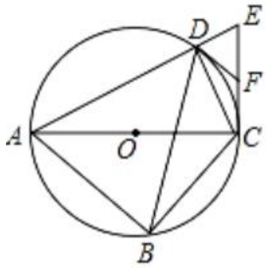
$\therefore\triangle ADG\backsim\triangle BDC$

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DG}{DC}$

$\therefore DG \cdot DB = AD \cdot DC = 8$

变式 2 **如图，四边形 ABCD 内接于⊙ O，对角线 AC 为⊙ O的直径，过点 C 作 AC 的垂线交 AD 的延长线于点 E，点 F 为 CE 的中点，连接 DB，DC，DF.AC=2$\sqrt{5}$DE，tan∠ACD=2，若 BD 是∠ADC 的平分线，AC=2$\sqrt{5}$**

求 BG • BD



解： $\because$ BD 是$\angle ADC$ 的平分线

$\therefore \angle ADG = \angle BDC$

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$

$\therefore AB = BC$

$\angle ACB = \angle BDC$

又 $\therefore$ 在 Rt△ABC 中

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore BC = AB = \sqrt{10}$

又 $\because \angle CBG = \angle DBC$

$\angle ACB = \angle BDC$

$\therefore \triangle BGC \backsim \triangle BCD$

$\therefore \dfrac{BC}{BD}=\dfrac{BG}{BC}$

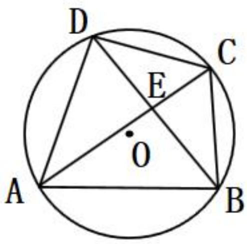
$\therefore BG \cdot BD = BC^2 = 10$

变式 3 **如图，四边形 ABCD 内接于⊙ O，对角线 AC，BD 相交于点 E，$\widehat{DC}=\widehat{CB}$当 AB=m,AD=n,CD=p 时，试用含 m，n，p 的式子表示 AE • CE**

解：$\because \widehat{DC} = \widehat{CB} \therefore \angle DAE = \angle CAB$

$\because \widehat{AB} = \widehat{AB} \therefore \angle ADE = \angle ACB$

$\therefore \triangle DAE \backsim \triangle CAB$



$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$

$\therefore AE \cdot AC = AD \cdot AB = m \cdot n$

$\because \widehat{AD} = \widehat{AD} \therefore \angle DCA = \angle ECD$

$\because \widehat{DC} = \widehat{CB} \therefore \angle DAC = \angle CDE$

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle CAD$

$\therefore \dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CE}{CD}$

$\therefore CE \cdot CA = CD^2 = p^2$

$\therefore AE \cdot CE \cdot AC^2 = m \cdot n \cdot p^2$

$AE \cdot AC + CE \cdot CA = AC \cdot (AE + CE)$

$AC^2 = m \cdot n + p^2$

$\therefore AE \cdot CE = \frac{m \cdot n \cdot p^2}{m \cdot n + p^2}$